Системы одновременных уравнений

$$\begin{cases} C_t = b_0 + b_1 Y_t + b_2 R_t + \varepsilon_t \\ R_t = \gamma_0 + \gamma_1 I_t + \gamma_2 M_t + u_t \\ I_t = \delta_0 + \delta_1 R_t + \delta_2 Y_{t-1} + v_t \\ Y_t = C_t + I_t + G_t \end{cases}$$

Характеристика структурной формы системы. Определяем, какие переменные системы относятся к эндогенным переменным, а какие к экзогенным переменным. Значения эндогенных переменных определяются внутри модели, а экзогенные переменные – это внешние по отношению к модели переменные. Эндогенные переменные так же могут выражаться через предопределенные переменные. Предопределенными называются лаговые эндогенные переменные, значения которых так же как и экзогенные переменные определены до рассмотрения соотношений. Таким образом, имеем эндогенные переменные исходной СОУ - C_t, R_t, I_t, Y_t, предопределенную переменную Y_{t-1}, экзогенные переменные - M_t, G_t.

Приведенная форма системы. В условии СОУ задана в структурной форме, для того, чтобы отобразить, как эндогенные переменные выражаются через экзогенные и предопределенные переменные – запишем систему в приведенной форме. Обозначим уравнения системы номерами (1)-(4) и проведем последовательные подстановки.

В уравнении (3) эндогенная переменная I_t выражена через эндогенную переменную R_t и предопределенную переменную Y_{t-1}, подставим соответственно правую часть уравнения (3) в правую часть уравнения (2) вместо переменной I_t:

$$R_t = \gamma_0 + \gamma_1 I_t + \gamma_2 M_t + u_t = \gamma_0 + \gamma_1\left(\delta_0 + \delta_1 R_t + \delta_2 Y_{t-1} + v_t\right) + \gamma_2 M_t + u_t =$$

$$= \gamma_0 + \gamma_1\delta_0 + \gamma_1\delta_1 R_t + \gamma_1\delta_2 Y_{t-1} + \gamma_1 v_t + \gamma_2 M_t + u_t$$

$$\left(1-\gamma_1\delta_1\right)R_t = \left(\gamma_0 + \gamma_1\delta_0\right) + \gamma_1\delta_2 Y_{t-1} + \gamma_2 M_t + \left(u_t + \gamma_1 v_t\right)$$

$$R_t = \frac{\gamma_0 + \gamma_1\delta_0}{1-\gamma_1\delta_1} + \frac{\gamma_1\delta_2}{1-\gamma_1\delta_1} Y_{t-1} + \frac{\gamma_2}{1-\gamma_1\delta_1} M_t + \frac{u_t + \gamma_1 v_t}{1-\gamma_1\delta_1} \qquad (I)$$

Таким образом, $R_t = f\left(Y_{t-1}, M_t\right)$. Подставив теперь переменную R_t, выраженную через экзогенную и предопределенную переменную, в уравнение (3) исходной системы, получаем:

$$I_t = \delta_0 + \delta_1 R_t + \delta_2 Y_{t-1} + v_t = \delta_0 + \delta_1\left(\frac{\gamma_0 + \gamma_1\delta_0}{1-\gamma_1\delta_1} + \frac{\gamma_1\delta_2}{1-\gamma_1\delta_1} Y_{t-1} + \frac{\gamma_2}{1-\gamma_1\delta_1} M_t + \frac{u_t + \gamma_1 v_t}{1-\gamma_1\delta_1}\right) + \delta_2 Y_{t-1} + v_t =$$

$$= \frac{\delta_0 + \gamma_0\delta_1}{1-\gamma_1\delta_1} + \frac{\delta_1\gamma_2}{1-\gamma_1\delta_1} M_t + \frac{\delta_2}{1-\gamma_1\delta_1} Y_{t-1} + \frac{\delta_1 u_t + v_t}{1-\gamma_1\delta_1} \qquad (II)$$

Таким образом, получили, что $I_t = f\left(Y_{t-1}, M_t\right)$. Подставляем в первое уравнение выражения, полученные для R_t и I_t:

$$C_t = b_0 + b_1 Y_t + b_2 R_t + \varepsilon_t = b_0 + b_1\left(\frac{\gamma_0 + \gamma_1\delta_0}{1-\gamma_1\delta_1} + \frac{\gamma_1\delta_2}{1-\gamma_1\delta_1} Y_{t-1} + \frac{\gamma_2}{1-\gamma_1\delta_1} M_t + \frac{u_t + \gamma_1 v_t}{1-\gamma_1\delta_1}\right) +$$

$$+ b_2\left(\frac{\gamma_0 + \gamma_1\delta_0}{1-\gamma_1\delta_1} + \frac{\gamma_1\delta_2}{1-\gamma_1\delta_1} Y_{t-1} + \frac{\gamma_2}{1-\gamma_1\delta_1} M_t + \frac{u_t + \gamma_1 v_t}{1-\gamma_1\delta_1}\right) + \varepsilon_t =$$

$$= \frac{b_0 - b_0\gamma_1\delta_1 + b_1\gamma_0 + b_1\gamma_1\delta_0 + b_2\gamma_0 + b_2\gamma_1\delta_0}{1-\gamma_1\delta_1} + \frac{\left(b_1 + b_2\right)\gamma_1\delta_2}{1-\gamma_1\delta_1} Y_{t-1} + \frac{\left(b_1 + b_2\right)\gamma_2}{1-\gamma_1\delta_1} M_t +$$

$$+ \frac{\left(b_1 + b_2\right)\left(u_t + \gamma_1 v_t\right) + \varepsilon_t\left(1-\gamma_1\delta_1\right)}{1-\gamma_1\delta_1} \qquad (III)$$

Полученное выражение $C_t = f\left(Y_{t-1}, M_t\right)$ и выражение для I_t подставляем в тождество (4) исходной системы:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t = \frac{\delta_0 + \gamma_0\delta_1 + b_0 - b_0\gamma_1\delta_1 + b_1\gamma_0 + b_1\gamma_1\delta_0 + b_2\gamma_0 + b_2\gamma_1\delta_0}{1-\gamma_1\delta_1} + \frac{\left(\left(b_1 + b_2\right)\gamma_1 + 1\right)\delta_2}{1-\gamma_1\delta_1} Y_{t-1}$$
$$+ \frac{\left(\left(b_1 + b_2\right) + \delta_1\right)\gamma_2}{1-\gamma_1\delta_1} M_t + \frac{\left(\left(b_1 + b_2\right) + \delta_1\right)u_t + \left(\left(b_1 + b_2\right)\gamma_1 + 1\right)v_t + \varepsilon_t\left(1-\gamma_1\delta_1\right)}{1-\gamma_1\delta_1} + G_t \qquad (IV)$$

Таким образом, $Y_t = f\left(Y_{t-1}, M_t, G_t\right)$. Уравнения (I)-(IV) задают исходную СОУ в приведенной форме.

Необходимое условие идентифицируемости. Используем исходную структурную форму системы для ответа на вопрос об идентифицируемости системы. Наша система содержит $N = 4$ уравнения для определения $N = 4$ эндогенных переменных, в системе имеется $M = 3$ экзогенных и предопределенных переменных. Проведем проверку каждого уравнения системы на идентифицируемость, обозначая соответственно количество входящих в уравнение эндогенных и экзогенных переменных n и m. Первое необходимое условия идентифицируемости записывается как $(N-n)+(M-m) \ge N-1$

	$N-n$	$M-m$	Знак	$N-1$	Вывод
(I)	4-3=1	3-0=3	>	3	Переопределено, т.е. сверхидентифицируемо
(II)	4-2=2	3-1=2	>	3	Переопределено
(III)	4-2=2	3-1=2	>	3	Переопределено
(IV)	4-3=1	3-1=2	=	3	Идентифицируема

На практике иногда используется *Второе необходимое условие* идентифируемости $(M-m) \ge n-1$, которое очевидно так же выполняется в нашем случае. Вся система идентифицируема.

Достаточное условие идентифицируемости. Составим соответствующие матрицы коэффициентов:

(I)	I_t	Y_{t-1}	M_t	G_t	Вывод
(II)	γ_1	0	γ_2	0	Есть определитель не равный нулю, ранг матрицы =3, уравнение (I) идентифицируемо.
(III)	-1	δ_2	0	0	
(IV)	1	0	0	1	

(II)	C_t	Y_t	Y_{t-1}	G_t	Вывод
(I)	-1	b_1	0	0	Есть определитель не равный нулю, ранг матрицы =3, уравнение (II) идентифицируемо.
(III)	0	0	δ_2	0	
(IV)	1	-1	0	1	

(III)	C_t	Y_t	M_t	G_t	Вывод
(I)	-1	b_1	0	0	Есть определитель не равный нулю, ранг матрицы =3, уравнение (III) идентифицируемо.
(II)	0	0	γ_2	0	
(IV)	1	-1	0	1	

(IV)	R_t	Y_{t-1}	M_t		Вывод
(I)	b_2	0	0		Есть определитель не равный нулю, ранг матрицы =3, уравнение (IV) идентифицируемо.
(II)	-1	0	γ_2		
(III)	δ_1	δ_2	0		

Достаточное условие выполняется для всех уравнений системы, вся система идентифицируема.